MARZO,
MES DE LAS
MATEMÁTICAS

Viajando sobre curvas y superficies

Texto **Daniel Ramos**
Aplicaciones interactivas **Bernat Ancochea, José Manuel Arranz, José Muñoz, Débora Pereiro y José Luis Muñoz**

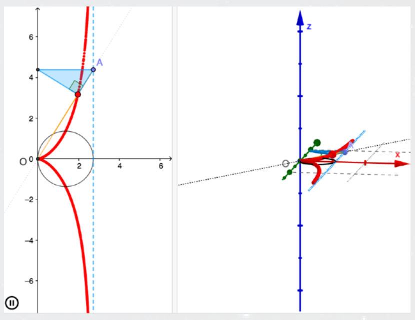
“Las curvas son los paréntesis de las ideas”.

José Manuel Álvarez Pérez

Euclides condenó a los geómetras a vivir en un mundo de rectas, círculos y planos. Por suerte a lo largo de la historia muchos matemáticos nos han mostrado que la naturaleza está plagada de líneas y superficies curvas.

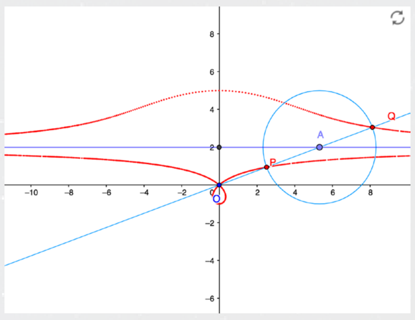
GOBIERNO DE ESPAÑA | MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN
FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

Los antiguos griegos basaron toda su geometría en las construcciones que se pueden hacer con regla y compás: la recta y la circunferencia.
Son las líneas más simples, y encarnan el concepto de distancia: un segmento de línea recta realiza la distancia entre dos puntos; un compás permite trasladar distancias de un sitio a otro, y por tanto son las herramientas ideales para hacer geometría. Sin embargo, hay muchas otras curvas que aparecen en geometría, como las secciones cónicas (elipses, parábolas, hipérbolas), y muchas otras más complejas.



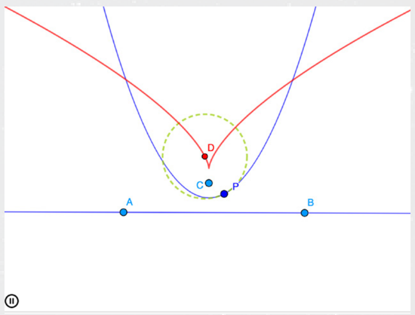
Cisoide de Diocles

Curvas para resolver problemas
La Cisoide de Diocles o la Concoide de Nicomedes son curvas definidas mecánicamente, que los griegos usaron para resolver problemas clásicos como la duplicación del cubo (dado un cubo, hallar el lado de otro con volumen doble) o la trisección del ángulo (dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales), pues no hallaban construcciones más simples. No fue hasta en el siglo XIX cuando se demostró que es imposible resolver esos problemas con regla y compás.



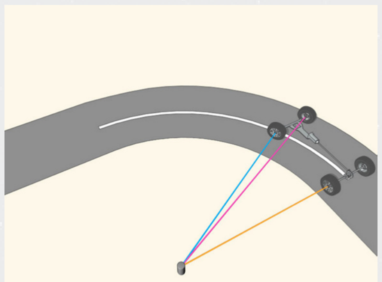
Concoide de Nicomedes

Midiendo la curvatura
Podemos medir cuán curvada está una línea. Intuitivamente, una recta no lo está, y la curvatura de una circunferencia se mide por su radio (cuanto menor es el radio, mayor es su curvatura). Con una curva cualquiera, la podemos aproximar en primer orden por una *recta tangente* (que pasa por dos puntos infinitesimalmente cercanos), y en segundo orden por la *circunferencia osculatriz* (que pasa por tres puntos infinitesimalmente cercanos). Así, en ese punto, la recta tangente nos da la dirección, y la circunferencia osculatriz su curvatura. Su centro y radio se denominan centro de curvatura y radio de curvatura respectivamente. El conjunto de todos los centros de curvatura se denomina la *evoluta* de la curva original.

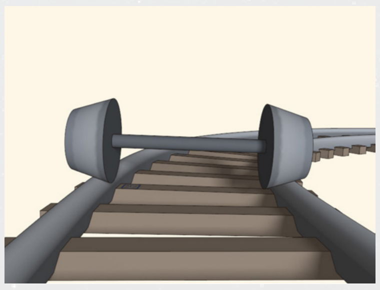


Evoluta de una parábola

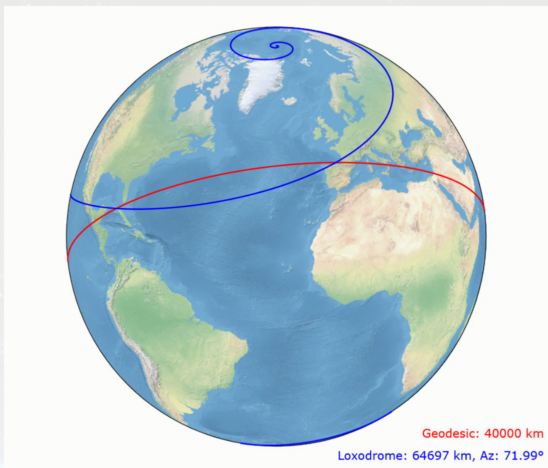
Al diseñar el trazado de una carretera o las vías de un tren, los ingenieros deben calcular el radio de curvatura mínimo de la curva en cada punto, que dependerá de la velocidad a la que los coches o trenes vayan a circular. ¿Son siempre paralelas las ruedas delanteras de un coche? No, para que el coche tome la curva suavemente, los ejes de las ruedas deben apuntar hacia el centro de curvatura de la carretera, además de girar a velocidades diferentes. ¿Y en un tren? En este caso las ruedas sí que son paralelas, pero las ruedas tienen la forma de una superficie cónica, de manera que al tomar una curva, el tren se inclina ligeramente y el radio efectivo de la rueda (del eje al punto de contacto) es diferente para la rueda del lado interior y exterior.



En una recta o una curva podemos movernos hacia adelante o hacia atrás. Si añadimos otra dimensión, para movernos a izquierda o derecha, nos movemos en una superficie. El plano es la superficie más simple pero hay muchas superficies posibles.



Navegando la Tierra
Vivimos sobre una enorme esfera casi perfecta, nuestro planeta Tierra. Si queremos navegar una gran distancia a través del océano, querremos hacerlo por la ruta más corta, que no puede ser una línea recta ya que no podemos abandonar la superficie curvada del planeta. La curva más corta entre dos puntos se denomina geodésica, y en el caso de una esfera, son arcos de Para navegar la Tierra, sin embargo, la línea más fácil de seguir es la que forma un ángulo constante con el Norte, que podemos conocer con una brújula o las estrellas. Esta curva, llamada loxodroma, fue la base de las exploraciones marítimas desde el siglo XVI. No existe ningún mapa que represente la Tierra a escala, debido a la curvatura de la esfera (lo demostró Gauss en 1827), pero el mapa de Mercator (creado por Gerardus Mercator en 1569) representa las loxodromas por líneas rectas y permite así hallar líneas de rumbo.

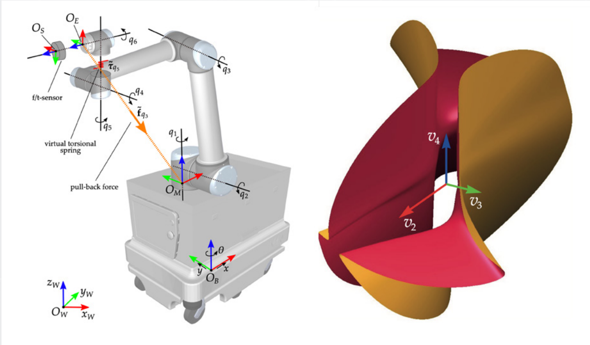


Dos rutas entre la Habana y Vigo. En rojo la más corta (geodésica, 6900 km), en azul la más fácil (loxodroma, 7050 km), que guarda un ángulo constante de 72° con la dirección del Norte.

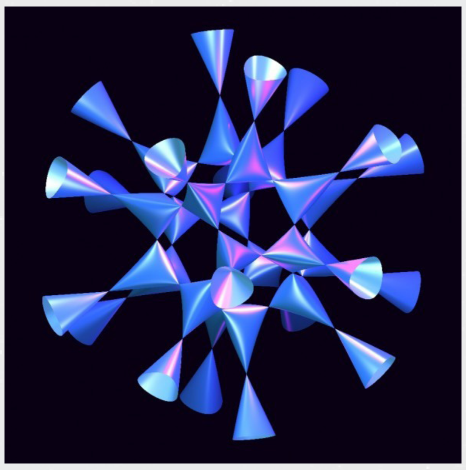
Superficies singulares

Otras superficies más complejas se pueden definir mediante procedimientos mecánicos o algebraicos, al igual que con las curvas. Una ecuación que involucre las variables x, y, z define una superficie formada por todos los puntos del espacio cuyas coordenadas satisfacen esa ecuación. A veces, estas superficies tienen puntos singulares, donde la superficie no es lisa, que tienen especial interés en matemáticas y en sus aplicaciones.

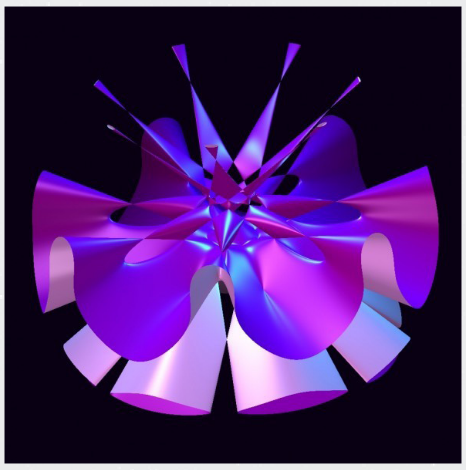
¿Cuál es el número máximo de puntos singulares que puede tener una superficie? Depende del grado de la ecuación que la define. Lo cierto es que no lo sabemos.



Un brazo robótico con diferentes articulaciones (variables de grados de libertad). Las relaciones entre esas variables forman una ecuación algebraica. En la imagen, representación de sus singularidades (por ejemplo, cuando el brazo está extendido y rotar una articulación pierde su efecto)

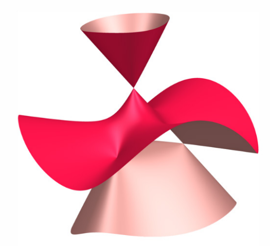


La *séxtica de Barth*, una superficie de grado 6, construida por Wolf Barth en 1996, singulares tiene el récord con 65 puntos singulares, el máximo posible para las de grado 6.



En 2004 Oliver Labs, construyó una superficie de grado 7 con 99 puntos singulares. Y Hasta ahora nadie ha superado esa marca.

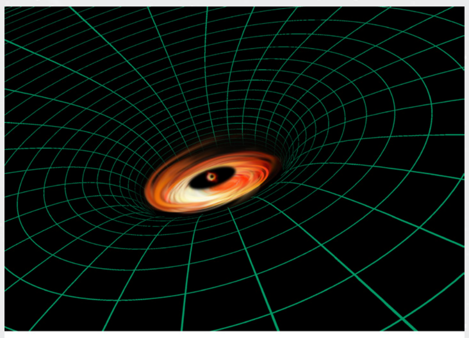
$$(x+y+z-1)^2+(x+y+z+3)^2+$$
$$+x^3+y^3+z^3+1-\frac{1}{4}(x+y+z+1)^3=0$$



Una superficie algebraica, con su ecuación.
Es una cúbica (grado 3) con cuatro puntos singulares.

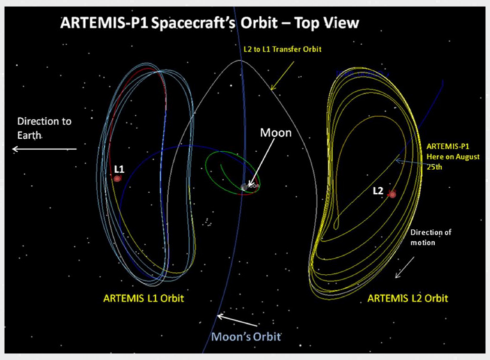
El espacio y el universo

Una curva puede estar contenida en un plano, en una superficie o, en general, en el espacio tridimensional. Esto es lo que sucede por ejemplo con las trayectorias de cohetes y sondas espaciales, que están definidas por sus motores y sobre todo por las fuerzas gravitatorias de la Tierra y otros objetos celestes. De hecho la teoría de la Relatividad General de Einstein nos dice que en realidad la gravitación es una deformación del espacio-tiempo, así que las trayectorias de objetos libres son geodésicas en un espacio curvo, e incluso la luz sigue estas trayectorias curvadas.



$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}\Gamma_{\mu\nu}$$

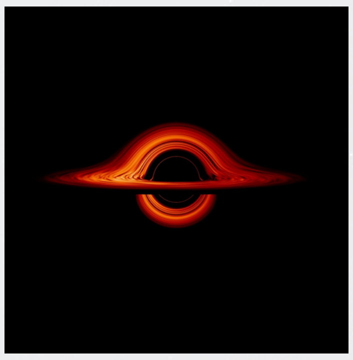
Ecuación de Einstein para la Relatividad General. A la izquierda del signo igual, los tensores que miden la geometría; a la derecha, los que miden la energía-materia y sus propiedades físicas. La igualdad significa que la energía-materia deforma y curva el espacio.

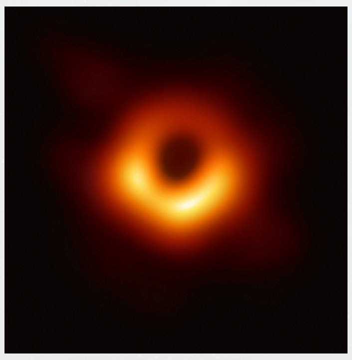


Trayectoria orbital de la sonda ARTEMIS-P1 alrededor de la Luna. Los puntos de Lagrange L1 y L2 son aquellos donde las fuerzas de atracción gravitatoria y/o centrífuga de la Tierra y la Luna se cancelan.

Simulaciones de un agujero negro que tuviese un disco de acreción alrededor, formado por materia radiante que girase a su alrededor. El agujero en sí no emite luz (es negro), la luz no puede escapar de él. La luz emitida por el disco se curva alrededor del agujero, y es percibida por un observador como un halo alrededor de un círculo negro.

Interstellar-©-Warner-Bros.-Entertainment-Inc.





La primera imagen real de un agujero negro, tomada en 2019 por el *Event Horizon Telescope*.